4 Aspectos didácticos

4.1 Dificultades conceptuales

Normalmente el Cálculo le gusta a los estudiantes porque suelen tener éxito con las simples reglas para calcular las derivadas o las integrales. De todas formas, en el fondo de este éxito puede haber una seria falta de entendimiento del significado de los conceptos. Por ejemplo, ¿qué es la derivada de una función, que no sea una fórmula que se puede obtener siguiendo una sucesión de reglas? ¿Qué se quiere decir con la integral de una función, o con la solución de una ecuación diferencial?

¿Qué significa el símbolo $\frac{dx}{dy}$? *Parece* como si fuera un cociente, pero lo es?

Desde hace algunos años las investigaciones han resaltado los problemas cognitivos en las ideas fundamentales del cálculo (Ver las referencias 4.6(a) y (c)). Por ejemplo, ¿qué puede servir como una definición *elemental* de una tangente?

En algunos estudiantes típicos las respuestas son del tipo de las siguientes:

> Una recta que corta en un sólo punto a una curva,
> Una recta que toca, pero no corta la curva,
> Una recta que toca la parte convexa de la curva,
> ... toca la curva por fuera. (Tall 1986)

Revelan la idea de que una tangente toca a la gráfica pero no la cruza, una impresión que puede producir confusión cuando los estudiantes se encuentran con la idea de una tangente a una curva en un punto de inflexión. Vinner(1983) encontró que cuando se les pedía a los estudiantes que trazaran la tangente a la curva $y=x^3$ en el origen, una gran proporción esbozaba un segmento un poco hacia un lado de forma que no cortara a la curva. Los estudiantes también pueden tener una gran dificultad con la tangente a una recta, que rompe todas las reglas informales del juego. (No *toca* la curva. *Es* la curva ...)

La noción de *límite* también presenta muchos problemas. Un "límite" en su significado ordinario es como un límite de velocidad: algo que no se puede sobrepasar. La idea de *definir* una tangente como el límite de una sucesión de cuerdas a medida que dos puntos se van acercando puede ocasionar un cierto número de problemas cognitivos. Frases como "se acerca" o "se aproxima" o "tan cerca como se quiera" tienen connotaciones que sugieren que el límite no se puede alcanzar, y por lo tanto la posición de límite es inalcanzable. Propuesta la siguiente cuestión:

A medida que A->B la línea AB tiene la tangente AT como límite. (¿Cierto o falso?)

una respuesta de un alumno de 16 años, que se encontraba con el concepto por primera vez fue:

> ... ¿Límite? ... es algo de lo que no estoy seguro ... porque si fuera el límite,

nunca llegaría allí, así que el límite no puede ser AT, ¿o sí?

(Tall 1986)

Así la servidumbre que se paga a los fundamentos lógicos del cálculo al dar una introducción "intuitiva" a la derivada como el límite visual de una cuerda que se mueve puede provocar errores subyacentes serios. Los estudiantes no suelen articular tales dificultades y pronto aprenden a ejecutar las manipulaciones rutinarias de la forma que el profesor les aprueba y esconden cualquier problema de fondo.

Los conceptos como *tangente, límite, derivada, diferencial, integral* etc. son extremadamente complejos. El enfoque tradicional al currículo, que inicialmente introduce a los estudiantes en ejemplos elementales primero, pueden ser los responsables de crear dificultades cognitivas posteriormente. Sólo extender la experiencia con las tangentes a círculos puede dejar la impresión que la tangente "toca a la curva en un sólo punto... por el exterior", así experiencias limitadas al comienzo del Cálculo pueden llevar a creencias implícitas erróneas sobre conceptos de cálculus.

Una posible solución es dar a los estudiantes más experiencias típicas de las potentes ideas del cálculo desde el principio; El problema es cómo hacerlo sin hacer las experiencias aún más complejas y confusas.

4.2 Ventajas y desventajas del ordenador

El ordenador tiene ciertas ventajas en la experiencia del aprendizaje que complementa las actividades del profesor humano. Primero, puede procesar rápidamente y de forma precisa una enorme cantidad de información, obteniendo salida gráfica en movimiento que puede ayudar a los estudiantes a visualizar ideas complejas de una forma entendible. Segundo, *exterioriza* el conocimiento representándolo en una pantalla en lugar de en la cabeza de alguien. Esto ayuda a los estudiantes a preguntarse cuestiones porque es más fácil decir "¿qué es lo que hace el ordenador?" que preguntarle al profesor "¿qué es lo está *usted* haciendo... ?" Tercero es *democrático*, en el sentido que dada una entrada siempre dará la misma salida, sin tener en cuenta quién pulsa la tecla. Así responde de la misma forma tanto al alumno como al profesor y puede estimular al estudiante y sobrepasar al profesor en su uso. Cuarto se puede programar para que responda de una manera predecible y ordenada. Esto puede proporcionar un entorno para construir y probar conceptos conjeturando el resultado de cierta entrada y luego teclear la entrada para ver si la conjetura es correcta.

También hay desventajas al usar un ordenador. Por ejemplo, invariablemente "malrepresenta" la información cuando dibuja. Las gráficas no se dibujan de una forma suave, sino están construidas con un número de pixel finitos, de forma que la recta no necesariamente es recta y un círculo no parece un círculo. Además la forma en que se truncan las coordenadas para encajar en un pixel u otro a veces tiene consecuencias insospechadas. El ordenador trabaja en unidades de pixels y trunca cualquier parte decimal en exceso de forma que el pixel unidad 0.1 será redondeado a 0 pero −0.0001 se redondeará a −1. Una gráfica como $x sen(\frac{1}{x})$ que oscila arriba y abajo del eje x cerca de x=0 puede por tanto no ser representada de una forma fiable.

Esta desventaja puede tener una salida ventajosa. Es necesario subrayar el hecho que el ordenador sólo produce un *modelo* de una curva, no la gráfica teórica propiamente. Así pues los estudiantes se deben meter en la discusión a dos bandas de lo que el ordenador está haciendo, y construyendo de una forma activa marcos coherentes en sus mentes que distingan entre la teoría mental y el dibujo visual. El objetivo eventual de usar un ordenador es construir ideas teóricas coherentes en la mente del estudiante. Teniendo que pensar sobre el significado de los dibujos de ordenador pueden ampliar las imágenes mentales.

En los primeros días del ordenador se concentró su uso como una máquina de enseñar, con una serie de instrucciones sobre qué hacer, tareas prácticas para reforzar ideas, tareas de diagnóstico para comprobar errores reconocibles que pudieran (esperanzadoramente) corregirse mediante bucles instructivos etc. El enfoque gráfico al cálculus no tiene nada de esto. Las dificultades conceptuales subyacentes en el cálculus no se pueden resolver por psicología simple de estímulo-respuesta. Necesitan exponer con el uso de software flexible que fomente la discusión entre el profesor y los estudiantes y entre los propios estudiantes.

4.3 Relaciones entre estudiantes, el profesor y el ordenador

Los enfoques tradicionales al currículo contienen un ciclo en cada lección donde el profesor explica primero ideas nuevas, luego se les proporciona a los estudiantes ejercicios secuenciados, partiendo de ejemplos rutinarios hasta llegar a problemas más extensos. Esto puede a menudo llevar a una visión estrecha del currículo en el que el éxito se mide por la habilidad de hacer problemas específicos relacionados con el contexto en el que se aprende.

El ordenador en su forma actual puede servir de asistencia ampliando el horizonte conceptual. En su libro "Intelligence, Learning and Action", Skemp (1979) esbozó tres modos diferentes de construir y comproba~ conceptos:

Construcción de la realidad	Comprobación de la realidad
Modo (1)	Modo (1)
A partir de nuestros encuentros con lo que ocurre: *experiencia*	En contra de las expectativas de los sucesos que ocurren: *experimento*
Modo (II)	Modo (II)
A partir de la realidad de otros: *comunicación*	Comparación con la realidad de otros: *discusión*
Modo (III)	Modo (III)
desde dentro, mediante formación de conceptos de orden superior. Por extrapolación, imaginación , intuición: *creatividad*	Comparación con los conocimientos y creencias propias: *consistencia interna*

El remarcó que, como se enseña actualmente las matemáticas puras caen en modo (iii) en deferentes grados en modo (ii) y nada en el modo (i). Sin embargo si uno interpreta la idea de actividades de ordenador centrándose en el modo (i), ayudados por la explicación y discusión en el modo (ii), entonces el ordenador nos da una forma totalmente nueva de atacar el aprendizaje de los conceptos matemáticos. La importante primera fase en el aprendizaje de nuevos conceptos no ha de ser necesariamente mediante la manipulación de conceptos que están representados *físicamente* en un sentido concreto, sino *externamente*, de una manera que permita manipulaciones predecibles para construir y comprobar. Este entorno predecible para construir y comprobar se puede proporcionar mediante software de ordenador apropiado.

El ordenador tiene capacidades que complementan las de la mente humana. Donde la mente humana es susceptible de error, aunque capaz de hacer grandes saltos intuitivos, el ordenador es consistente (suponiendo que haya sido convenientemente programado) y predecible. Es esta consistencia y predecibilidad que lo hace, en terminología de Skemp, un *entorno para construir y comprobar conceptos matemáticos*. Pues, si el ordenador se programa para efectuar procesos matemáticos de una forma que los haga transparentes al usuario, entonces los programas se podrían usar en modo (i), con explicaciones en modo (ii), con el fin de ganar experiencia de los conceptos en acción, formando una base cognitiva para la posterior construcción y comprobación de las formalidades de la teoría en modo (ii) y (iii). Uno puede *construir* conceptos al considerar un número de ejemplos (y no-ejemplos) de un proceso en acción observando regularidades y abstrayendo generalidades subyacentes, y de una forma complementaria, uno puede comprobar conceptos conjeturando lo que puede ocurrir en situaciones todavía no intentados antes de llevarlas a cabo para comprobar las conjeturas.

El enfoque gráfico al calculus se diseñó para aprovechar estos modos diferentes de construir y comprobar conceptos de una manera flexible.

===================

Figura 61

===================

Para aprovechar el software, el profesor se debería familiarizar primero con los programas antes de ir con los estudiantes, con el fin de saber las principales opciones disponibles y las ideas potentes que en cada programa se representan. La autoconfianza se construye no sobre la bravuconería, sino en el éxito. El profesor debería primero tener éxito al manejar el programa antes de meterse con los alumnos. Sin embargo, no es necesario conocer *todo* acerca de los programas antes de usarlos. La exploración le llevará a nuevas ideas que un profesor con confianza debería estar preparado a discutir si fueran relevantes, quizá aún teniendo que admitir en alguna ocasión ignorancia.

La siguiente fase puede ser o el uso de los programas con propósito expositivo para resaltar ideas potentes, o arrojar a los estudiantes a la oscuridad dándoles tareas exploratorias apropiadas. Ambos métodos han sido probados con éxito, y ha dependido de las inclinaciones del profesor.

Si el profesor usa los programas para introducir conceptos, es bueno animar a los estudiantes a participar, haciendo que sugieran funciones para dibujar, rangos o dominios que podrían ser apropiados, y cosas por el estilo, y sacar individuos de la clase que salgan al ordenador y tecleen lo que se haya decidido. Al conseguir que se interesen los alumnos, será más probable que hablen de sus ideas, revelando concepciones o concepciones erróneas que se pueden discutir en ese momento de una forma abierta.

Independientemente del enfoque que se adopte, debería seguir un tiempo en el que los estudiantes utilizaran el ordenador por sí mismos, preferiblemente en pequeños grupos, para fomentar el desarrollo de sus propias ideas mediante tareas deja de ser una fuente de ideas y actúa como asesor, respondiendo a peticiones d información y explicación que partan de los estudiantes.

Es una práctica sensible tener una discusión posterior entre el profesor y los alumnos, revolviendo las ideas juntos, resaltando los conceptos importantes y poniendo atención en las dificultades posibles tanto técnicas como teóricas, ayudando a los estudiantes a moldear sus imágenes mentales sobre las matemáticas que subyacen bajo la representación por ordenador.

El propósito de toda la actividad es crear una rica variedad de conceptualizaciones coherentes en las mentes de los estudiantes. El ordenador ayudará al crear de una forma rápida imágenes deseadas, pero estas imágenes se han de interpretar y enriquecer mediante la explicación y la discusión.

4.4 Organizando la clase

El ordenador se debe introducir de una forma organizada y sensible. Dos formas suelen ser posibles en las escuelas: un ordenador en una clase que se usa cuando, y si, se requiere, o una habitación que contiene varios ordenadores y que se tiene que reservar para ocasiones específicas. Entre las dos hay quizá una alternativa más apropiada: una clase que siempre tiene un ordenador principal que se puede usar cuando se necesite, y un pequeño número de otros ordenadores que se pueden usar para las actividades de los alumnos.

En los experimentos, una clase de una docena de alumnos podía fácilmente usar un sólo ordenador en un sistema rotatorio que dividiera los alumnos en cuatro grupos de tres y usar el ordenador por turnos. Cuando haya más alumnos un segundo ordenador se hace imprescindible.

La mejor solución práctica sería un aula en la que por lo menos se dispusiera siempre de un ordenador, con ordenadores extra que proporcione un mínimo de uno por cada diez o doce estudiantes, siendo uno cada dos o tres el ideal. Si se dispone de un número mayor de ordenadores, podrían estar en una habitación contígua. Sin embargo, los problemas de calendario a la hora de usar el ordenador, haciendo coincidir el horario disponible con los momentos en que se necesitan, no se debería de subestimar. Es mejor tener siempre disponibles uno o dos ordenadores para clases normales, para usar cuando se necesite. Estos se podrían complementar disponiendo que los alumnos puedan acceder al aula de ordenadores en su tiempo libre en otro momento.

Es una buena práctica intentar *enseñar* en una clase en la que todos los estudiantes tengan sus manos sobre un teclado. Una vez que los estudiantes se involucran usando el ordenador, llega a ser muy difícil para ellos, desentenderse del teclado y concentrarse en lo que profesor está diciendo. Las introducciones y los grupos de discusión se desarrollan mejor centrándose en un sólo ordenador.

4.5 El nuevo enfoque del calculus

El análisis es una mezcla de diferentes representaciones de los conceptos de tasa de cambio y crecimiento cumulativo. Por ejemplo, la tasa de cambio tiene varios métodos para atacarla:

(a) geométrica: la derivada es el límite del gradiente de la cuerda de extremos $(x,f(x))$ y $(x+h,f(x+h))$ a medida que h tiende a 0.

(b) numérico: la derivada es el límite numérico de la razón $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

a medida que h tiende a 0.

(c) simbólico: la derivada es el límite simbólico de la expresión

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a medida que h tiende a 0.

Un enfoque tradicional tiende a fijar x y usar (a) y (b) para llegar al simbolismo de (c). Por lo tanto mucho del currículo del cálculo tiende a ser de naturaleza simbólica y es susceptible de perder mucho de su significado geométrico y se su sabor numérico.

Los ordenadores pueden tener que ver con los tres enfoques. Los métodos simbólicos y numéricos se pueden llevar a cabo mediante "manipuladores simbólicos" (Ver por ejemplo Lane y otros (1986) y Hodgson (1987) en las referencias 4.6 (a)). Sin embargo, aunque Lane y otros apuntan el éxito de este enfoque, Hodgson informa una "aceptación algo limitada... por los estudiantes".

Los enfoques simbólicos en sí mismos pueden generar grandes dificultades en el entendimiento. Es posible "saber" que la integral de tg x es ln|sec x + tg x|, sin saber lo que significa. De hecho la integral de tg x *no es* ln|sec x + tg x|. Los profesores han estado pasando información falsa a sus estudiantes sin darse cuenta.

El enfoque gráfico dado aquí tiene el objetivo primario de pr porcionar experiencias con las deas geométricas y numéricas, de forma que m s tarde se puedan unir a los productos de los procesos simbólicos, dá doles una interpretación con significado.

El enfoque gráfico del calculus usando ordenador se diseñó para proporcionar a los estudiantes de un entorno apropiado en el que construir una red de ideas relacionadas, mas que trazar una ruta única y lógica a través de los conceptos. Entre estas ideas hay un pequeño número de ideas generativas y potentes que forman la base del cálculus.

La más central de ellas es la *linealidad local* Es inicialmente una idea intuitiva, pero se puede transformar más tarde en una definición formal. La idea intuitiva de *localmente recta* es que, cuando se amplía un gráfico mucho, las pequeñas porciones pueden parecer (casi) rectas. Es posible entonces visualizar el cambio de gradiente de tal curva gráfica mirando a cualquier porción bajo una gran ampliación y *ver* el gradiente como la (casi) recta porción ampliada.

La idea necesita experiencia para proporcionar una base de los conceptos sobre los que se basa. El programa AMPLIACIÓN, que amplía cualquier gráfico que se le de, muestra la idea fundamental trabajando para muchos gráficos como polinomios o círculos, aunque también, revela casos en los que falla como curvas con esquinas o puntos angulosos (como |x|), o de una forma catastrófica los gráficos altamente enrevesados como la curva de Blancmange.

Así el gradiente de una gráficas se puede dar una impresión global, con los limitados procesos que de forma implícita están contenidos en la idea de ampliación. No es necesaria una discusión explícita de límites. El programa GRADIENTE tiene rutinas tanto para dibujar la función gradiente global aproximada, como para investigar los procesos del límite de una forma pictórica y numérica en el punto que se desee. Esta última rutina puede proporcionarnos una visión de las nociones de derivadas por la izquierda y la derecha, que tiene lugar cuando la gráfica por un lado u otro es localmente recta (por ejemplo en una esquina o punto anguloso).

La experiencia demuestra que lo crudo del modelo del ordenador puede ayudar a los estudiantes para conseguir conceptos sólidos para la notación de límite. Se ve en la pantalla que las cuerdas se mueven hacia la posición tangencial, pero los valores numéricos mostrados del gradiente muestra que está próximo, dentro de una número dado de decimales, más que coincida con la verdadera tangente. Así se puede distinguir entre la tangente *práctica*, que es la línea que pasa por dos puntos muy próximos sobre la curva, y la tangente *teórica*, que es la recta que pasa por un solo punto, cuyo gradiente es el gradiente de la gráfica en ese punto. Numéricamente uno no puede calcular el gradiente de una forma absolutamente precisa, pero es posible alcanzar una buena aproximación. Esto crea dos tendencias opuestos:

(a) el ordenador es suficientemente bueno para trazar un dibujo en muchos casos,

pero

(b) existen consideraciones teóricas subyacentes que requerirá un enfoque teórico mejor para la derivada.

Todos los estudiantes que usan el enfoque del ordenador deberían ser conscientes de estos dos factores, aunque la profundidad a la que posteriormente estudien la teoría subyacente dependerá de su habilidad y nivel de especialización.

El ordenador se puede usar para introducir la noción de gradiente de una gráfica localmente recta y la consideración más profunda que esa es una propiedad muy especial no compartida por otras gráficas que no son localmente rectas. Se puede usar también para descubrir un número de derivadas estándares específicas mediante experimentos que previamente no estaban disponibles a la manipulación formal.

Otro factor, que más tarde se probará con éxito en las ecuaciones diferenciales, es interpretar la expresión $\frac{dx}{dy}$ en la misma forma en que lo hizo Leibnitz en su primera publicación sobre el cálculus: no como una expresión indivisible, no como una razón de infinitesimales, sino como el gradiente de la recta tangente donde dx es un incremento de x y dy es el incremento correspondiente *a la tangente*. Esto mostrará su valor posterior cuando la dirección del vector tangente se interprete como un vector en la dirección (dx,dy).

La noción de *integral* se puede enfocar por dos rutas independientes. Uno es el proceso inverso de la derivación: conociendo la derivada ¿cuál es la función? Esto se discutirá brevemente como la idea fundamental en las ecuaciones diferenciales. La otra es la idea de área bajo una curva, que se investiga usando el programa AREA.

De nuevo, el dibujo de un área de aproximación ayuda a los estudiantes a *ver* como las bandas rectangulares pueden llevar a una aproximación más ajustada del área. La presentación simultánea del área numérica con varios decimales ayuda a mostrar cómo las mejores aproximaciones se pueden obtener normalmente tomando bandas más estrechas. Sin embargo, el cálculo del área desde x=a a x=b se obtiene calculando el área acumulada a medida que se le añade nuevas franjas. Si se dibujan los valores de estas áreas parciales, se construye la *función* área A(x), que es el área aproximada para un valor dado x. Esto centra la atención, no en el cálculo de mejores aproximaciones desde x=a a x=b, sino en la función global de área A(x). Para pasos muy pequeños esto se estabilizará para dar el gráfico I(x) cuya fórmula debería de investigarse.

Las experiencias llevadas a cabo nos muestran que es menos fácil para los estudiantes adivinar la función área con el mismo nivel de éxito que se adquiere con el caso anterior del gradiente. Sin embargo, es posible en algunos casos simples, dar dibujos apropiados (ver las sugerencias en la sección 3.5). Y es posible investigar varias ideas potentes, como la relación entre el signo del área calculada y la combinación de los signos del eje x y los valores de y, o el hecho de que comenzar desde diferentes puntos da funciones de áreas que difieren en una constante, o que calcular un área que cruza un lugar donde la función no está definida podría llevar a clarificar dificultades.

Pero la idea más fuerte es el *teorema fundamental del cálculo*: que la derivada de la función área I(x) es la función original f(x). Hay varias formas para ver esto, pero la que contiene más información es estirando la gráfica horizontalmente al tiempo que se mantiene la misma escala en el eje y. Visiblemente estirará la gráfica como si se tratara de goma, y la porción vista en la ventana parecerá que es horizontal. Así el área desde x a x+h, para valores pequeños de h es aproximadamente f(x)*h. Pero la verdadera área es I(x+h)-I(x), por tanto

$$\frac{I(x+h)-I(x)}{h} \approx f(x) \ .$$

Cuando h se hace pequeño, el estiramiento llega a ser de forma que la gráfica es aún más horizontal, y lleva al resultado de I'(x)=f(x). ¿Para que tipo de gráficas es verdad esto? Intuitivamente, aquellas que tengan la propiedad que el estirar una pequeña porción llegue a parecer plana. Pero "plana" en este caso significa que se mantiene dentro de un pixel en el monitor. Si nos concentramos en una porción de la gráfica centrada en $x=x_0$, entonces con una escala del eje y fija, obtenemos los valores de f(x) que caen a menos de un pixel de $f(x_0)$. Esto se puede modelar teóricamente diciendo

> "habiendo especificado un error en el eje y, $\varepsilon>0$, necesitamos encontrar un intervalo en el eje x, es decir desde x_0-d a x_0+d de forma que cuando x caiga en un rango desde x_0-d a x_0+d entonces f(x) cae dentro del rango $f(x_0)-\varepsilon$ a $f(x_0)+\varepsilon$ ".

El matemático experimentado reconocerá de una forma clara que es la definición de función continua.

En otras palabras, la continuidad aparece como una condición natural que se precisa para establecer el teorema fundamental.

Además es fácil usar el programa para visualizar teoremas sutiles que se prueban posteriormente en análisis. La gráfica de |x| es continua (pero no es derivable en el origen); su función integral es derivable. (¿Cuál es la fórmula?) La gráfica de INT x no es continua en ningún entero, aunque su función integral *es* continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en los enteros (donde sus gradientes a la izquierda y la derecha son visiblemente diferentes, explique porqué).La gráfica de la función blancmange no es derivable en ningún punto (aunque es visiblemente *continua*: si se estira horizontalmente llega a parecer plana); su función integral I(x), sin embargo, es visiblemente suave, y I'(x) es la función blancmange. Por lo tanto I(x) es derivable una vez en todo R pero no lo es dos veces nunca...

La otra cara de la integración es el proceso de invertir la integración: dada la derivada dy/dx hallar la función original. En su forma más simple se traduce en: conocida f'(x) hallar f(x). La solución es vía un diagrama de direcciones (campo). A cada punto (x,y) le dibujamos un segmento que represente el gradiente f'(x). Ahora sobreimpresionemos una curva que siempre siga la dirección de dichos segmentos. La idea fundamental de resolver una ecuación diferencial es simplemente trazar una curva cuyas direcciones se conocen.

Si el gradiente f'(x) se escribe como $\frac{dy}{dx}$, entonces la dirección del vector tangente se puede considerar como un vector dirección (dx,dy). Por tanto una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx}=g(x,y)$$

se puede ver como una ecuación en la que la tangente tiene como vector director

$$(dx,dy) = (dx,\ g(x,y)\ dy),$$

que está en la dirección (1, g(x,y)).

De una forma un poco sutil podemos introducir cuando consideremos una ecuación diferencial tal como:

$$y\frac{dy}{dx}=-x\ .$$

La dirección tangente (dx,dy) es paralela a

$$(y\ dx,\ y\ dy) = (y\ dx,\ -x\ dx),$$

que está en la dirección (y,-x). Esto da una dirección única para cada punto en el plano excepto (x,y), y las soluciones son los familiares círculos centrados en el origen. Sin embargo, Si tuviéramos que tratar la ecuación como un problema de hallar una *función* y=f(x) cuya derivada satisface

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

entonces nos encontraríamos la misma dificultad, explicando lo que ocurre cuando y=0. De esta forma se puede ver que tales ecuaciones se ven mejor como verdaderas ecuaciones *diferenciales* (describiendo la derivada de una función)